

Το παρόν περιέχει συνοπτικές υποδείξεις για ενδεικτικές απαντήσεις των θεμάτων.

Οι απαντήσεις των εξεταζομένων οφείλουν να είναι πλήρεις
και να περιέχουν ολοκληρωμένες αιτιολογήσεις όλων των ισχυρισμών τους.

Αριθμός Μητρώου :

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ / ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ / ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 3 / ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ / 03 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)

Με τη συμμετοχή σας στην εξέταση αποδέχεστε τα όσα αναφέρονται στον Κανονισμό Εξετάσεων του Τμήματος
και στον Κανονισμό Εξετάσεων του Μαθήματος, όπως αυτοί δημοσιεύονται στους αντίστοιχους ιστοχώρους.

1. Μονάδες: 2

Εξετάστε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής. Αν είναι αληθής, δώστε πλήρη απόδειξη. Αν είναι ψευδής, δώστε κατάλληλο αντιπαράδειγμα ή αποδείξτε την άρνηση του ισχυρισμού.

“Η τομή δύο συνεκτικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^2$ είναι υποχρεωτικά συνεκτικό σύνολο.”

Λύση.

Είναι ψευδής. Θεωρούμε τα σύνολα

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

και

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 = 1\}.$$

Καθένα από αυτά είναι συνεκτικό. Προκύπτει ότι η τομή τους είναι ένα σύνολο που αποτελείται από ακριβώς δύο διακριτά σημεία. Έτσι, η τομή τους δεν είναι συνεκτικό σύνολο.

2. Μονάδες: 2

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & \text{αν } y \neq 0 \\ 0, & \text{αν } y = 0. \end{cases}$$

Εξετάστε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση.

Υπολογίζοντας το όριο της f και συγκρίνοντας το με την τιμή της στο τυχαίο σημείο του συνόλου $A = (0, 1) \times \{0\}$, προκύπτει ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του A . Συνεπώς, η συνάρτηση επιπρόσθετα δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3. Μονάδες: 2

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Βρείτε, αν υπάρχει, την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο $(0, 0)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{r} = (1, 1)$.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τον σχετικό ορισμό, καταλήγουμε στο όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$$

το οποίο δεν υπάρχει. Έτσι, η ζητούμενη κατευθυνόμενη παράγωγος δεν υπάρχει.

4. Μονάδες: 2

Θεωρούμε τη σύνθετη συνάρτηση

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2,$$

όπου $u(x, y) = xe^y$, $v(x, y) = xe^{-y}$ και $w(x, y) = \frac{x}{y}$, για $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, υπολογίστε τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Λύση.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, v, w) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v, w) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial w}(u, v, w) \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) \\ &= 2ue^y + 2ve^{-y} + 2w \frac{1}{y} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, v, w) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v, w) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial w}(u, v, w) \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \\ &= 2x \left(ue^y - ve^{-y} - w \frac{1}{y^2} \right). \end{aligned}$$

5. Μονάδες: 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^3$. Υπολογίστε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f , εφόσον αυτές υπάρχουν, βασιζόμενοι στην εύρεση των κρίσιμων σημείων της.

Λύση.

Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύνολο του πεδίου ορισμού είναι το κενό σύνολο. Στη συνέχεια, βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία. Έχουμε $f_x(x, y) = 3x^2 - 6y$, $f_y(x, y) = -6x + 3y^2$ και τα κρίσιμα σημεία είναι το $(0, 0)$ και το $(2, 2)$. Έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right)^2 = -36 < 0$$

συνεπώς η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο στο σημείο $(0, 0)$. Σημειώνουμε ότι το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο. Επίσης,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 2) \right)^2 = 108 > 0$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 2) = 12 > 0$$

συνεπώς η συνάρτηση έχει ελάχιστο στο σημείο $(2, 2)$, το $f(2, 2) = -8$.